Шәһәр күләмендә математика фәненнән татар телендә үткәрелә торган олимпиаданың йомгаклау этабы биремнәре
2023-2024 нче уку елы
11 нче сыйныф

Эш вакыты – 180 минут
Гомуми балл – 25

1. Яссылыкны ирекле 60 өлешкә бүләрлек итеп 12 турыны үткәрегез.

   Чишү. N_x — x микъдары булсын ди. Ул вакытта $N_{\text{өлеш}} = 1 + N_{\text{туры}} + N_{\text{кисешү ноктасы}}$ $(*)$. 3, 4, 5әр параллель турыдан торган 3 төркем сызабыз. Төркем эчендә кисешүләр юк. k һәм m элементларыннан торган төркемнәрдә $k \times m$ кисешү булачак. Пар төркемнәр саны - 3. Нәтиҗәдә $3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 47$ кисешү. Ул вакытта өлешләр саны $1 + 12 + 47 = 60$.

   Критерийлар. (а) Мисал сызылган (яисә тулы аңлатма китерелгән) һәм өлешләр саны нәкъ 60 булуы нигезләнгән - тулы балл (5 балл). (б) мисал ясалган (яисә тулы аңлатма китерелгән), әмма өлешләр санының нәкъ 60 булуы нигезләнмәгән - 3 балл. **(в)** $(*)$ формуласы язылган, әмма алга таба аңлатулар китерелмәгән — 2 балл.

2. 164 009 саны гади сан буламы? Нәкъ ике бүлүчесе булган натураль сан - гади сан дип атала. Беренчесе ул үзе, ә икенчесе берле саны.

   Чишү: $164\,009 = 160000 + 4000 + 25 - 16 = 400^2 + 2 \cdot 400 \cdot 5 + 5^2 - 4^2 = 405^2 - 4^2 = 401 \cdot 409$. Димәк, бу кушма сан.

   Критерийлар: (а) Бары җавап кына китерелгән — 0 балл. **(б)** Сан үзенә һәм берле санына тигез булмаган тапкырлаучыларга таркатылган (формула куллану мәҗбүри тугел, тапкырлаучыларга, сайлап карау алымын кулланып таркатылган булырга мөмкин) — 5 балл.

3. ABC өчпомагының яклары AB, BC һәм CA тиңдәшле рәвештә 10, 17 һәм 21 тигез. ABC өчпочмагына, периметры 24 һәм бер ягы AC да ятарлык итеп, турыпочмаклыкны камаганнар. Турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

   Чишү. Турыпочмаклыкның яклары x һәм $(12 - x)$ булсын ди, $(12 - x)$ AC да ята. Герон формуласы буенча мәйдан 24. Димәк, AC га торгызылган h биеклеге 8 гә тигез була. Охшашлыктан тигезләмә төзибез $1 = \frac{x}{h} + \frac{(12-x)}{21}$ (чөнки, турыпочмаклыкның түбәсе яткан нокта якны $x{:}\,h$ һәм $(12 - x){:}\,21$

чагыштырмаларына пропорциональ булган өлешләргә бүлә). Моннан $x = \frac{72}{13}$ табабыз. Димәк икенче ягы $\frac{84}{13}$.

Критерийлар. (а) Бары тик җавап китерелгән (ABC өчпочмагы өчен өстәмә шартлар кулланып, аерым очрак өчен китерелгән җавап) — 1 балл. **(б)** ABC өчпочмагының мәйданы табылган — 2 балл. **(в)** Якка торгызылган биеклекнең зурлыгы 21 табылган — 3 балл. **(г)** Турыпочмаклыкның нигезле рәвештә бер генә ягы булсада табылган — 5 балл.

4. Тигезләмәне чишегез: $\lg(0{,}1x^4 - 0{,}8x^2 + 11{,}6) = \cos \pi x$. ($\lg x = \log_{10} x$ — нигезе 10 булган x логарифмы).

   Чишү. Тигезләмәнең ике ягына да 1 кушабыз. Сул якта аны 10 га тапкырлау рәвешендә логарифм астына кертәбез. Ул вакытта тигезләмә $\lg(x^4 - 8x^2 + 116) = 1 + \cos \pi x$ рәвешен ала. $\lg(x^4 - 8x^2 + 116) = \lg((x^2 - 4)^2 + 100) \geq \lg 100 = 2 \geq 1 + \cos \pi x$ булуы тоела, Димәк, системаны чишәргә кирәк: $\begin{cases} \lg((x^2-4)^2+100) = 2, \\ 2 = 1 + \cos \pi x. \end{cases}$ моннан $\begin{cases} (x^2-4)^2 = 0, \\ x = 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Значит, $x = \pm 2$.

   Критерийлар. (а) Бары тик җавап кына китерелгән — 1 балл. **(б)** $\lg(x^4 - 8x^2 + 116) \geq 2$ яисә $2 \geq 1 + \cos \pi x$ булуы китерелгән — 2 балл. **(в)** Җавап табылган һәм башка чишелеш була алмавы исбатланылган — 5 балл.

5. Кызыл карандашның бәясе 27 тиен, зәңгәрнеке — 23. Карандашларны сатып алуга 9 сум 40 тиеннән дә күбрәк акча тотарга ярамый. Максималь санда кызыл һәм зәңгәр карандашны сатып алып куярга кирәк. Шулай да кызыл карандашларны мөмкин булганча әзрәк алырга кирәк, тик зәңгәр карандашларның саны алардан 10нан да артык булырга тиеш түгел. Атап үтелгән шартларда ничә кызыл һәм ничә зәңгәр карандаш сатып алып булыр?

   Чишү. Кызыл карандашларның саны K, зәңгәрләрнеке — C булсын ди. Шарт буенча $\begin{cases} 27K + 23C \leq 940, \\ |C - K| \leq 10. \end{cases}$ Безне $K + C$ кыйммәте кызыксындырганга, өске тигезсезлекне $25(K + C) \leq 940 + 2(C - K) \leq 960$ рәвешенә китерәбез ($C - K$ аермасына чикләүдән). 25 кабатлы һәм 960 зуррак булмаган иң зур сан — 950. Ул чакта $C + K = 38$, $C - K = 10$. Шулай итеп, $C = 24$, $K = 14$. 24 зәңгәр карандаш һәм 14 кызыл карандаш алынган.

   Критерии. (а) Бары тик җавап китерелгән — 1 балл. **(б)** Тулы чишелеш китерелгән — 5 балл.